RECHERCHES

SUR LES

SINGULARITÉS DE CERTAINES SÉRIES SPÉCIALES SUR LEUR CERCLE DE CONVERGENCE

PAR

C. HANSEN

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. VI 1

KØBENHAVN

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1908

§ 1. Le problème de la détermination des fonctions analytiques présentant des singularités spéciales a conduit à établir de nombreux exemples de fonctions qui admettent leur contour de convergence comme ligne singulière mais qui diffèrent beaucoup en ce qui concerne la nature des points singuliers[1]. La note suivante est consacrée à étudier le caractère des singularités offertes par quelques fonctions spéciales qui ne se laissent pas prolonger au-delà du cercle de convergence; et parmi les fonctions dont nous traitons on en trouvera dont les développements asymptotiques ne sont valables que le long d'une ligne droite issue de l'origine. Tel sera le cas pour la fonction $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}}$ dont nous traitons dans le dernier paragraphe. Comme on le verra, nous arriverons en ce qui concerne cette fonction au résultat suivant: Sur un arc quelconque du cercle de convergence, aussi petit qu'on voudra, il y aura une infinité de points jouissant de cette propriété que la fonction convergera vers une valeur constante en s'approchant des points considerés suivant un rayon vecteur issu de l'origine et une infinité de points au voisinage desquels la fonction est indéfiniment croissante.

§ 2. Dans une note[2] que nous avons eu l'honneur de présenter à l'Académie royale des sciences et des lettres de Danemark, nous avons étudié le caractère analytique des fonctions définies par l'expression:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{rn+t}}{1-s^{rn+t}} \tag{1}$$

où r et t sont des nombres entiers positifs quelconques. Chaque série de cette forme est convergente pour toute valeur du variable complexe s, dont le module reste inférieur à l'unité.

Dans la note citée nous avons démontré que la fonction $F(s)$ ne pourra être prolongé au de-là du cercle de convergence. En désignant par α une racine

[1]) Voir par exemple l'excellent livre de M. Hadamard: La série de Taylor et son prolongement analytique, chapitre IV. Paris 1901.

[2]) Bulletin de l'Académie royale des sciences et des lettres de Danemark, année 1907, p. 3—19.

primitive[1]) de l'équation $x^{rm+t} = 1$, dans laquelle m est un entier positif quelconque, et en posant $s = \alpha u$, u étant une quantité réelle située dans l'intervalle

$$0 \leqq u < 1,$$

nous avons démontré la formule[2])

$$F(\alpha u) = F_1 + \frac{1}{r(rm+t)\,lu}\left[\frac{r(rm+t)\,lu}{1-u^{rm+t}}\,u^{rm+t} + l\left(1-u^{\left(\frac{r}{2}+1\right)(rm+t)}\right) + F_2 + F_3 + F_4\right]. \quad (2)$$

où nous avons posé pour abréger:

$$F_1 = \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{\alpha^{rp+t}\,u^{rp+t}}{1-\alpha^{rp+t}\,u^{rp+t}} + \sum_{r=m+1}^{p=rm+t} \frac{\alpha^{rp+t}\,u^{rp+t}}{1-\alpha^{rp+t}\,u^{rp+t}},$$

$$F_2 = \sum_{p=1}^{p=m-1} l\left(1-\alpha^{rp+t}\,u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\right) + \sum_{p=m+1}^{p=rm+t} l\left(1-\alpha^{rp+t}\,u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\right),$$

$$F_3 = 2\sum_{p=1}^{p=m-1}\int_0^\infty \frac{r(rm+t)\cdot lu\cdot\alpha^{rp+t}\cdot u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\cdot\sin r(rm+t)\,ylu}{1-2\alpha^{rp+t}\,u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\cos r(rm+t)\,ylu+\alpha^{2rp+2t}\,u^{r(rm+t)+2pr+2t}}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \quad (3)$$

$$+2\sum_{p=m+1}^{p=rm+t}\int_0^\infty \frac{r(rm+t)\cdot lu\cdot\alpha^{rp+t}\,u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\cdot\sin r(rm+t)\,ylu}{1-2\alpha^{rp+t}\,u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\cos r(rm+t)\,ylu+\alpha^{2rp+2t}\,u^{r(rm+t)+2pr+2}}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1},$$

$$F_4 = 2r(rm+t)\int_0^\infty \frac{lu\cdot u^{\left(\frac{r}{2}+1\right)(rm+t)}\cdot\sin r(rm+t)\,ylu}{1-2u^{\left(\frac{r}{2}+1\right)(rm+t)}\cos r(rm+t)\,ylu+u^{(r+2)(rm+t)}}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Le logarithme a sa détermination principale.

En étudiant la formule (2) nous sommes arrivé à ce résultat que le cercle de convergence est une coupure essentielle pour les fonctions $F(s)$.

Les recherches suivantes ont pour but de déterminer le caractère des singularités de certaines fonctions spéciales de la forme (1) sur le cercle de convergence et, comme nous le verrons, les fonctions jouissent de propriétés très remarquables. C'est pour simplifier les calculs que nous traitons des fonctions spéciales et non pas la fonction la plus générale de la forme (1).

Comme nous l'avons dit, on conclut de l'équation (2) que la fonction $F(s)$ ne pourra être prolongée au-delà du cercle de convergence, et pour le faire voir il faut examiner comment varient les modules des quantités que nous avons désignées par les lettres F_1, F_2, F_3 et F_4 quand u tend vers l'unité.

Quand aux quantités F_1 et F_2 on voit tout de suite qu'elles ont des valeurs finies four $u = 1$.

[1]) La dénomination de racine primitive est employée en ce sens que ladite racine ne doit pas satisfaire à une équation de la même forme correspondant à une valeur inférieure de m.

[2]) L'équation (10) page 11 dans la note citée.

Considérons alors la quantité F_3. Elle est composée d'un nombre fini d'intégrales définies, et nous allons démontrer que ces intégrales convergent vers zéro pour $u = 1$ [1]).

Posons pour abréger l'écriture

$$u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+} = k,$$

$$\frac{r(rm+t)}{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t} = \mu$$

et désignons la quantité complexe α^{rp+t} par $a+ib$, où a et b sont des quantités réelles qui satisfont à l'équation $a^2+b^2=1$. Il s'agit alors de considérer l'intégrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{lk \sin \mu y lk}{1-2(a+ib)k\cos \mu y lk + (a+ib)^2 k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Nous remarquons d'abord qu'on a:

$$|I| \leqq \int_0^\infty \frac{|lk| \cdot |\sin \mu y lk|}{|1-2(a+ib)k\cos \mu y lk + (a+ib)^2 k^2|} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

c'est à dire:

$$|I| \leqq \int_0^\infty \frac{|lk| \cdot |\sin \mu y lk|}{+\sqrt{[1-2ak\cos \mu y lk + (2a^2-1)k^2]^2 + 4(1-a^2)k^2[\cos \mu y lk - ak]^2}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

en tenant compte de la relation $a^2+b^2=1$.

Cherchons maintenant le minimum de la fonction

$$[1-2akz+(2a^2-1)k^2]^2 + 4k^2(1-a^2)[z-ak]^2$$

où z désigne un variable réel.

La méthode élémentaire montre que la valeur de z, pour laquelle la fonction devient minimum, est déterminée par l'équation

$$-2ak(1-2akz+(2a^2-1)k^2) + 4k^2(1-a^2)(z-ak) = 0.$$

De cette équation on tire:

$$z = a \cdot \frac{k^2+1}{2k}.$$

On s'assure tout de suite que la fonction en question devient minimum pour cette valeur de z, et on a par conséquent:

[1]) Cette démonstration ne se trouve pas dans notre note citée page 1; pour combler cette lacune nous la donnons ici.

$$+\sqrt{[1-2ak\cos\mu ylk+(2a^2-1)k^2]^2+4k^2(1-a^2)[\cos\mu ylk-ak]^2}$$

$$\geqq+\sqrt{\left[1-2ak\cdot\frac{a(k^2+1)}{2k}+(2a^2-1)k^2\right]^2+4k^2(1-a^2)\left[\frac{a(k^2+1)}{2k}-ak\right]^2}$$

$$\geqq+(1-k^2)\sqrt{1-a^2}\,.$$

On obtient ainsi:

$$|I|\leqq\int_0^\infty\frac{|lk|\cdot|\sin\mu ylk|}{(1-k^2)|\sqrt{1-a^2}|}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

et à fortiori:

$$|I|\leqq\frac{\mu\cdot|lk|\cdot|lk|}{(1-k^2)|\sqrt{1-a^2}|}\int_0^\infty\frac{y\,dy}{e^{2\pi y}+1}\,.$$

Posons encore $k=1-\varepsilon$. Pour des valeurs assez petites de ε on a $|lk|<2\varepsilon$, d'où il suit:

$$|I|\leqq\frac{\mu}{|\sqrt{1-a^2}|}\cdot\frac{4\varepsilon}{2-\varepsilon}\int_0^\infty\frac{y\,dy}{e^{2\pi y}+1}\,.$$

Cette inégalité montre que le module de l'intégrale I converge vers zéro en faisant tendre vers zéro la quantité ε, pourvu que la quantité réelle a soit différente de $+1$ ou -1. Dans ces deux cas l'inégalité ne nous dit rien en ce qui concerne le module de I.

Nous sommes ainsi forcés d'étudier ces deux cas particulièrement. D'abord nous remarquons que nous avons posé

$$\alpha^{rp+t}=a+ib\,,$$

où α désigne une racine primitive de l'équation $x^{rm+t}=1$. On voit dès lors qu'il faut donner à p la valeur de m pour que a aie la valeur de $+1$ et la valeur de $\frac{rm-t}{2r}$ pour que a aie la valeur de -1.

Comme on le voit par l'équation (3), la quantité F_3 est composée des intégrales qui correspondent aux valeurs suivantes de p:

$$p=1,\ 2,\ 3\ \ldots.\ m-1,\ m+1,\ \ldots.\ rm+t.$$

Le nombre m ne se trouve pas dans cette série, mais il peut arriver qu'elle contienne le nombre $\frac{rm-t}{2r}$ et il nous faut alors considérer l'intégrale

$$I_1=\int_0^\infty\frac{lk\sin\mu ylk}{1+2k\cos\mu ylk+k^2}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}\,,$$

à laquelle se réduit l'intégrale I en posant $a+ib=-1$. La fraction sous le signe $\int$ ne converge pas uniformément vers zéro quand k tend vers l'unité, mais néanmoins l'intégrale s'évanouit pour $k=1$ comme nous allons le montrer à présent.

Supposons donnée une quantité réelle positive δ aussi petite qu'on voudra. Nous écrivons l'intégrale I_1 sous la forme

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

où

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{lk \cdot \sin \mu y l k}{1 + 2k \cos \mu y l k + k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y} + 1},$$

$$I_3 = \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{lk \cdot \sin \mu y l k}{1 + 2k \cos \mu y l k + k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y} + 1}.$$

Posons encore $k = 1 - \varepsilon$ et considérons d'abord l'intégrale I_2:

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{l(1-\varepsilon) \sin \mu y l (1-\varepsilon)}{4(1-\varepsilon)\cos^2 \frac{\mu}{2} y l (1-\varepsilon) + \varepsilon^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y} + 1}.$$

Pour des valeurs de y dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta}$ la fraction

$$\frac{l(1-\varepsilon) \sin \mu y l (1-\varepsilon)}{4(1-\varepsilon)\cos^2 \frac{\mu}{2} y l (1-\varepsilon) + \varepsilon^2}$$

convergera uniformément vers zéro pour $\varepsilon = 0$.

Pour le faire voir, il faut démontrer que l'inégalité

$$\frac{|l(1-\varepsilon)| \cdot |\sin \mu y l (1-\varepsilon)|}{4(1-\varepsilon)\cos^2 \frac{\mu}{2} y l (1-\varepsilon) + \varepsilon^2} < \delta \tag{4}$$

est satisfaite pour des valeurs de ε assez petites quelle que soit la valeur de y dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta}$.

Dans cet intervalle on a:

$$|\sin \mu y l(1-\varepsilon)| = 2\left|\sin \frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon) \cdot \cos \frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right| \leqq \mu y\, |l(1-\varepsilon)| \cdot \left|\cos \frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right|$$
$$\leqq \frac{\mu}{\delta} |l(1-\varepsilon)| \cdot \left|\cos \frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right|.$$

Supposons maintenant la quantité ε si petite qu'on ait

$$|l(1-\varepsilon)| \leqq \frac{\delta^2}{\mu},$$

il en résulte:

$$|\sin \mu y l(1-\varepsilon)| \leqq \delta \left|\cos \frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right|.$$

Il s'ensuit que l'inégalité (4) sera satisfaite pour toute valeur de $\cos \frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)$ qui satisfait à l'inégalité

$$\frac{|l(1-\varepsilon)| \cdot \delta \cdot \left|\cos \frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right|}{4(1-\varepsilon)\cos^2 \frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon) + \varepsilon^2} < \delta.$$

Nous écrivons cette inégalité sous la forme:

$$0 < 4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon) - |l(1-\varepsilon)|\cdot|\cos\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)| + \varepsilon^2.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme du second membre de cette inégalité soit positif quelle que soit la valeur de $\cos\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)$, est la suivante:

$$l^2(1-\varepsilon) < 16\varepsilon^2(1-\varepsilon).$$

Pour des valeurs de ε assez petites on a $|l(1-\varepsilon)| < 2\varepsilon$, d'où il suit que cette condition est remplie, et à fortiori l'inégalité (4). On a ainsi:

$$|I_2| \leqq \delta\int_0^{\frac{1}{\delta}}\frac{dy}{e^{2\pi y}+1} < \delta\int_0^{\infty}\frac{dy}{e^{2\pi y}+1} < \frac{l2}{2\pi}\delta$$

c'est à dire: l'intégrale I_2 converge vers zéro, quand k tend vers l'unité.

Quant à l'intégrale I_3, elle convergera aussi vers zéro pour $k=1$, ce qu'on voit par les calculs suivants. On conclut de l'expression

$$I_3 = \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{l(1-\varepsilon)\sin\mu yl(1-\varepsilon)}{4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

qu'on a:

$$|I_3| \leqq \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{\mu\cdot l^2(1-\varepsilon)\cdot y}{4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$\leqq \mu\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{l^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2}\cdot\frac{y\,dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Supposons qu'on ait $|l(1-\varepsilon)| < 2\varepsilon$, ce qui est toujours permis; on a alors:

$$|I_3| < 4\mu\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{y\,dy}{e^{2\pi y}+1} < 4\mu\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{dy}{e^{\pi y}+1} = -\frac{4\mu}{\pi}\Big[l(1+e^{-\pi y})\Big]_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}$$

c'est à dire $|I_3| < \frac{4\mu}{\pi}l\left(1+e^{-\frac{\pi}{\delta}}\right) < \frac{4\mu}{\pi}\delta$

d'où il suit que le module de l'intégrale I_3 s'évanouit pour $k=1$, et par conséquent l'intégrale I_1 tendra aussi vers zéro.

Il nous reste alors à considérer l'intégrale F_4 (page 4). En y posant $u^{\left(\frac{r}{2}+1\right)(rm+t)} = k$, $\frac{r(rm+t)}{\left(\frac{r}{2}+1\right)(rm+t)} = \mu$, nous aurons une intégrale I_4 de la forme:

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{lk \cdot \sin \mu y l k}{1 - 2k \cos \mu y l k + k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y} + 1}.$$

Pour $k = 1$ la fonction sous le signe $\int$ prend la forme $\frac{0}{0}$; or elle a une vraie valeur finie, ce qu'on voit par un calcul élémentaire. Dans le paragraphe suivant nous déterminons la limite vers laquelle converge l'intégrale I_4 en faisant tendre u vers l'unité. Mais il suffit à présent de savoir que le module de I_4 reste fini pour $k = 1$, se qu'on voit aisément.

Posons encore $k = 1 - \varepsilon$, ε étant une quantité réelle positive. Pour des valeurs assez petites de ε et quelle que soit la valeur de $y \geqq 0$ nous allons démontrer qu'on a:

$$\left| \frac{l(1-\varepsilon) \cdot \sin \mu y l (1-\varepsilon)}{1 - 2(1-\varepsilon) \cos \mu y l (1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2} \right| < 1. \tag{5}$$

Nous mettons cette inégalité sous la forme:

$$|l(1-\varepsilon)| \cdot |\sin \mu y l (1-\varepsilon)| < 4(1-\varepsilon) \sin^2 \frac{\mu}{2} y l (1-\varepsilon) + \varepsilon^2.$$

Il est évident que cette inégalité est satisfaite par des valeurs de ε et de y, pour lesquelles l'inégalité

$$2\,|l(1-\varepsilon)| \cdot \left|\sin \frac{\mu}{2} y l (1-\varepsilon)\right| < 4(1-\varepsilon) \sin^2 \frac{\mu}{2} y l (1-\varepsilon) + \varepsilon^2$$

est remplie.

Ecrivons cette inégalité sous la forme:

$$0 < 4(1-\varepsilon) \sin^2 \frac{\mu}{2} y l (1-\varepsilon) - 2\,|l(1-\varepsilon)| \cdot \left|\sin \frac{\mu}{2} y l (1-\varepsilon)\right| + \varepsilon^2.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme du second membre soit positif quelle que soit la valeur de y, est:

$$l^2(1-\varepsilon) < 4\varepsilon^2(1-\varepsilon).$$

On voit tout de suite que cette condition a lieu pour des valeurs de ε assez petites. Il suffit de supposer $|l(1-\varepsilon)| < \frac{3}{2}\varepsilon$, ce qui est toujours permis.

La démonstration de l'existence de l'inégalité (5) est ainsi établie, et on a par conséquent:

$$|I_4| < \int_0^\infty \frac{dy}{e^{2\pi y} + 1}$$

d'où on conclut que le module de I_4 ne pourra être infini pour $k = 1$.

D'après toutes ces remarques nous sommes en mesure d'examiner comment varie le module de la fonction $F(\alpha u)$, quand u tend vers l'unité.

Considérons l'équation (2) de la page 4. Nous savons à présent que les modules des quantités F_1, F_2, F_3, F_4 restent finis pour $u = 1$. Quant à la fraction

$$\frac{r(rm+t)\, u^{rm+t} \cdot lu}{1 - u^{rm+t}}$$

elle a pour limite -1 et le terme $l\left(1 - u^{\left(\frac{r}{2}+1\right)(rm+t)}\right)$ croît à l'infini pour $u = 1$.

En d'autres termes, le module de $F(au)$ surpasse chaque limite finie, quand u tend vers l'unité, c'est-à-dire que le module de $F(s)$ croît indéfiniment quand le variable s s'approche d'un point du cercle de convergence $s = e^{\frac{2p\pi i}{rm+t}}$ suivant le rayon vecteur.

Or, sur un arc de la circonférence aussi petit qu'on voudra, il y a un nombre infini de ces points, et par consequent la fonction $F(s)$ ne pourra être prolongée au-delà de ce cercle.

§ 3. Dans les paragraphes qui vont suivre nous ne nous occuperons plus de la fonction la plus générale de la forme (1). Au contraire nous allons traiter des fonctions spéciales de cette forme et notre but est de faire une étude détaillée du caractère des singularités des fonctions considérées sur le cercle de convergence et d'établir des développements asymptotiques pour les fonctions en question.

Nous commençons par traiter la série de Lambert $L(s)$ définie par l'équation

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1-s^n}.$$

Cette fonction est un cas spécial des fonctions $F(s)$.

En posant $t = 0$ et $r = 1$ dans l'équation (2) on aura la formule:

$$L(au) = \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{a^p u^p}{1-a^p u^p} + \frac{u^m}{1-u^m} + \frac{1}{mlu} \sum_{p=1}^{p=m-1} l(1-a^p u^{\frac{m}{2}+p}) + \frac{1}{mlu}\, l(1-u^{\frac{3m}{2}}) \qquad (6)$$

$$+ 2\sum_{p=1}^{p=m-1} \int_0^{\infty} \frac{a^p u^{\frac{m}{2}+p} \sin mylu}{1-2a^p u^{\frac{m}{2}+p} \cos mylu + a^{2p} u^{m+2p}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$+ 2\int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{3m}{2}} \sin mylu}{1-2u^{\frac{3m}{2}} \cos mylu + u^{3m}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

m étant un entier positif quelconque et a désignant une racine primitive de l'équation $x^m = 1$.

Faisons tendre maintenant u vers l'unité dans l'équation (6). Le second membre de cette équation contient la série $\sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{a^p u^p}{1-a^p u^p}$, qui pour $u = 1$ prend la forme $\sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{a^p}{1-a^p}$. Pour trouver la somme de cette série, nous remarquons que toutes les racines de l'équation $x^m = 1$ sont les nombres

$$1,\ a,\ a^2\ \ldots\ldots\ a^{m-1}$$

ce qui entraîne qu'on a identiquement

$$(x-1)(x-a)(x-a^2)\ \ldots\ldots\ (x-a^{m-1}) = x^m - 1$$

et par conséquent:

$$(x-a)(x-a^2)\ \ldots\ldots\ (x-a^{m-1}) = x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots\ldots + 1. \tag{7}$$

De cette identité on conclut:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-a^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x-a^{m-1}} = \frac{(m-1)x^{m-2} + (m-2)x^{m-3} + \ldots\ldots + 1}{x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots\ldots + 1}$$

ce qui donne pour $x = 1$

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-a^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{1-a^{m-1}} = \frac{m-1}{2}.$$

Posons:

$$\frac{a}{1-a} + \frac{a^2}{1-a^2} + \ldots\ldots + \frac{a^{m-1}}{1-a^{m-1}} = P.$$

En retranchant ces deux équations on aura:

$$m-1 = \frac{m-1}{2} - P$$

d'où l'on tire:

$$P = -\frac{m-1}{2}.$$

Quant à la série $\sum\limits_{p=1}^{p=m-1} l\left(1-a^p u^{\frac{m}{2}+p}\right)$ qui figure aussi au second membre de l'équation (6) on trouvera tout de suite la valeur pour $u = 1$ à l'aide de l'équation (7). En y posant $x = 1$ on obtient:

$$\sum_{p=1}^{p=m-1} l(1-a^p) = lm.$$

Il s'agit alors d'évaluer la série

$$\sum_{p=1}^{p=m-1} \int_0^\infty \frac{a^p \cdot u^{\frac{m}{2}+p} \sin mylu}{1 - 2a^p u^{\frac{m}{2}+p} \cos mylu + a^{2p} u^{m+2p}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \tag{8}$$

pour $u = 1$.

Posons pour abréger: $u^{\frac{m}{2}+p} = k$, $\dfrac{m}{\frac{m}{2}+p} = \mu$ et $a^p = a + ib$ où a et b sont des quantités réelles, qui satisfont à l'équation $a^2 + b^2 = 1$. Chaque terme de la série (8) a la forme

$$\int_0^\infty \frac{\sin \mu ylk}{1 - 2(a+ib)k\cos \mu ylk + (a+ib)^2 k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}. \tag{9}$$

Dans le paragraphe précédent nous avons démontré que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{lk \sin \mu ylk}{1 - 2(a+ib)k\cos \mu ylk + (a+ib)^2 k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

convergera vers zéro quand k tend vers l'unité, pourvu que a soit différent de 1.

L'intégrale (9) jouit de la même propriété, ce qu'on démontre en modifiant un peu la démonstration du paragraphe précédent.

Supposons donnée une quantité réelle positive δ aussi petite qu'on voudra et divisons l'intégrale (9) en deux parties A_1 et A_2 de manière qu'on pose:

$$A_1 = \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\sin \mu y l k}{1-2(a+ib)k\cos \mu y l k + (a+ib)^2 k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$A_2 = \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{\sin \mu y l k}{1-2(a+ib)k\cos \mu y l k + (a+ib)^2 k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Nous savons par la page (6) qu'on a

$$|1-2(a+ib)k\cos \mu y l k + (a+ib)^2 k^2| \geqq (1-k^2)\cdot|\sqrt{1-a^2}|$$

quelle que soit la valeur de y et par conséquent

$$|A_2| \leqq \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{\mu y\,|lk|}{(1-k^2)\cdot|\sqrt{1-a^2}|} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Posons $k = 1-\varepsilon$, ε positif, et supposons qu'on ait $|l(1-\varepsilon)| < 2\varepsilon$. On obtient alors:

$$|A_2| < \frac{\mu}{|\sqrt{1-a^2}|} \cdot \frac{2}{2-\varepsilon} \cdot \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^{2\pi y}+1}$$

et à fortiori (voir page 8):

$$|A_2| < \frac{2\mu}{\pi\,|\sqrt{1-a^2}|} \cdot \delta.$$

Considérons alors l'intégrale A_1. On a:

$$|1-2(a+ib)k\cos \mu y l k + (a+ib)^2 k^2|$$

$$= +\sqrt{[1-2ak\cos \mu y l k + (a^2-b^2)k^2]^2 + 4b^2k^2[\cos \mu y l k - ak]^2}$$

d'où il suit:

$$|1-2(a+ib)k\cos \mu y l k + (a+ib)^2 k^2| \geqq |2bk|\,|\cos \mu y l k - ak|.$$

En développant la fonction $\cos \mu y l k - ak$ en série de Taylor on obtient:

$$\cos \mu y l k - ak = 1 - ak - \frac{\mu^2 y^2 l^2 k}{2!} + \frac{\mu^4 y^4 l^4 k}{4!} - \frac{\mu^6 y^6 l^6 k}{6!} + \ldots \tag{10}$$

Pour des valeurs de y dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta}$ on a:

$$\frac{\mu^6 y^6 l^6 k}{6!} < \frac{\mu^4 y^4 l^4 k}{4!}$$

c'est-à-dire:

$$\mu y\,|lk| < \sqrt{30}$$

en considérant seulement des valeurs de k si près de l'unité, qu'on a $|lk| < \delta^2$, ce qu'il est toujours possible de faire.

Il suit de l'équation (10) qu'on a:

$$|\cos \mu ylk - ak| > 1 - ak - \delta,$$

car pour des valeurs considérées de y et de lk on a:

$$\frac{\mu^2 y^2 l^2 k}{2!} < \frac{\mu^2 \cdot \delta^4}{2!\,\delta^2} < \delta.$$

Or rien n'empêche de supposer $\delta < \frac{1}{2}(1-ak)$, de sorte qu'on a

$$|\cos \mu ylk - ak| > \tfrac{1}{2}(1-ak).$$

Cela posé, on a:

$$|A_1| < \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\mu y\,|lk|}{\frac{1}{2}(1-ak)\,|2bk|} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

d'où il suit:

$$|A_1| < \frac{\mu\,|lk|}{k\,|b|\,(1-ak)} \cdot C$$

en désignant par la constante C la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{y\,dy}{e^{2\pi y}+1}$.

Nous avons ainsi démontré qu'on a

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin \mu ylk}{1-2(a+ib)k\cos\mu ylk + (a+ib)^2k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}\right| < \frac{2\mu}{\pi\,|\sqrt{1-a^2}|} \cdot \delta + \frac{\mu C}{k\,|b|\,(1-ak)} \cdot |lk|.$$

Cette inégalité nous montre que l'intégrale du premier membre convergera vers zéro, quand k tend vers l'unité, pourvu que a soit différent de $+1$ ou -1, ce qui entraîne que b soit différent de zéro, car $a^2+b^2=1$.

Nous sommes ainsi forcés d'examiner particulièrement le cas $a=-1$. Le cas $a=+1$ ne peut pas rentrer ici, parce que la série (8), dont il s'agit, ne contient pas le terme pour lequel $a^p = 1$.

Pour $a=-1$ l'intégrale (9) prend la forme:

$$B = \int_0^\infty \frac{\sin \mu ylk}{1+2k\cos \mu ylk + k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Cette intégrale convergera aussi vers zéro pour $k=1$, comme nous allons le montrer à présent.

Supposons donnée de nouveau une quantité positive δ aussi petite qu'on voudra et écrivons:

$$B = B_1 + B_2$$

où

$$B_1 = \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\sin \mu ylk}{1+2k\cos \mu ylk + k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1},$$

$$B_2 = \int_{\frac{1}{\delta}} \frac{\sin \mu ylk}{1+2k\cos \mu ylk + k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

D'abord nous allons démontrer que la fonction sous le signe $\int$ converge uniformément vers zéro, quand k tend vers l'unité, pour des valeurs de y dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta}$.

Posons encore $k = 1 - \varepsilon$, ε étant réel positif. L'intégrale B_1 prend alors la forme:

$$B_1 = \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\sin \mu y l(1-\varepsilon)}{4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon) + \varepsilon^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Il s'agit de vérifier l'existence de l'inégalité

$$\frac{|\sin \mu y l(1-\varepsilon)|}{4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon) + \varepsilon^2} < \delta$$

que nous écrivons sous la forme

$$\left|2 \sin\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon) \cos\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right| < 4\delta(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon) + \delta\varepsilon^2.$$

En posant

$$\cos^2\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon) = 1 - \sin^2\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)$$

cette inégalité se laisse écrire:

$$2\left|\sin\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right| \left[\left|\cos\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right| + 2\delta(1-\varepsilon)\left|\sin\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right|\right] < 4\delta(1-\varepsilon) + \delta\varepsilon^2. \quad (11)$$

On voit tout de suite qu'on a

$$\left|\cos\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right| + 2\delta(1-\varepsilon)\left|\sin\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right| < 2$$

en supposant δ assez petit.

En outre nous supposerons ε si petit qu'on a $|l(1-\varepsilon)| < \frac{\delta^2}{\mu}$.

Pour des valeurs de y dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta}$ on a alors

$$\left|\sin\frac{\mu}{2} y l(1-\varepsilon)\right| < \frac{\mu}{2} \cdot y \cdot |l(1-\varepsilon)| < \frac{\mu}{2} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta^2}{\mu} < \frac{1}{2}\delta.$$

Cela entraîne que la quantité au premier membre de l'inégalité (11) reste plus petite que 2δ et cette inégalité est ainsi satisfaite.

Il s'ensuit qu'on a:

$$|B_1| < \delta \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} < \delta \int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Mais $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} = \frac{l2}{2\pi}$ et ainsi:

$$|B_1| < \frac{l2}{2\pi}\delta.$$

Considérons alors l'intégrale B_2. On démontre aisément qu'on a:

$$\frac{|\sin \mu y l(1-\varepsilon)|}{4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2} yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2} < \frac{\mu}{2}\delta\cdot y^2 \tag{12}$$

pour $y \geqq \frac{1}{\delta}$.

Nous mettons cette inégalité sous la forme:

$$2\left|\sin\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)\right| \left|\cos\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)\right| < \frac{\mu}{2}\delta y^2\left[4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2\right].$$

Cette inégalité est sûrement vérifiée pour des valeurs de y et de ε qui satisfont à l'inégalité:

$$2|l(1-\varepsilon)|\left|\cos\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)\right| < \delta y\left[4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2\right].$$

Pour des valeurs de $y \leqq \frac{1}{\delta}$ la quantité au second membre de cette inégalité est plus grande que

$$4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2$$

et on vérifie facilement que l'inégalité

$$2|l(1-\varepsilon)|\left|\cos\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)\right| < 4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2$$

c'est-à-dire:

$$0 < 4(1-\varepsilon)\cos^2\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)-2|l(1-\varepsilon)|\left|\cos\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)\right|+\varepsilon^2 \tag{13}$$

est satisfaite quelle que soit la valeur de $\cos\frac{\mu}{2}yl(1-\varepsilon)$ en supposant ε assez petit, car la condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme au second membre de l'inégalité (13) soit toujours positif est la suivante:

$$l^2(1-\varepsilon) < 4\varepsilon^2(1-\varepsilon)$$

et cette condition est remplie en supposant par exemple $|l(1-\varepsilon)| < \frac{3}{2}\varepsilon$, ce qu'on peut toujours faire.

L'inégalité (13) et à fortiori l'inégalité (12) sont ainsi justes, ce qui entraîne par rapport à l'intégrale B_2:

$$|B_2| < \frac{\mu}{2}\delta\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{y^2dy}{e^{2\pi y}+1} < \delta\int_0^{\infty}\frac{dy}{e^{\pi y}+1}$$

c'est-à-dire:

$$|B_2| < \frac{l2}{\pi}\delta$$

et par conséquent:

$$|B| < \frac{3l2}{2\pi}\delta.$$

En d'autres termes, l'intégrale B convergera vers zéro pour $k=1$.

Appliquons les résultats obtenus à l'équation (6) page 10. En faisant tendre u vers l'unité on obtient l'expression asymptotique:

$$L(au) = -\frac{m-1}{2} + \frac{u^m}{1-u^m} + \frac{lm}{mlu} + \frac{l(1-u^{\frac{3m}{2}})}{mlu}$$

$$+2\int_0^\infty \frac{u^{\frac{3m}{2}} \sin mylu}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu + u^{3m}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

L'intégrale qui figure au second membre de cette équation croît à l'infini pour $u=1$ comme la fonction $\frac{1}{lu}$. Multiplions les deux membres de l'équation par lu et cherchons la limite vers laquelle tend l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{lu \cdot \sin mylu}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu + u^{3m}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \tag{14}$$

quand u tend vers l'unité.

La fonction sous le signe $\int$ prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $u=1$ en supposant y fini. Un calcul élémentaire montre qu'elle a pour vraie valeur la quantité $\frac{4y}{m(4y^2+9)}$.

Maintenant nous allons démontrer que la limite de l'intégrale (14) existe pour $u=1$ et sera égale à l'intégrale:

$$\int_0^\infty \frac{4y}{m(4y^2+9)} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Nous commençons par vérifier l'inégalité

$$\frac{|lu| \cdot \sin my\,|lu|}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu + u^{3m}} \geqq \frac{4y}{m(4y^2+9)} \tag{15}$$

quelle que soit la valeur de y dans l'intervalle

$$0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta},$$

δ étant une quantité réelle positive aussi petite qu'on voudra, pourvu que u ait des valeurs assez proches de l'unité.

Posons $u^{\frac{3m}{2}} = 1-\varepsilon$, ε positif, et écrivons l'inégalité (15) sous la forme:

$$\frac{|l(1-\varepsilon)|}{3}(4y^2+9)\sin\frac{2}{3}y\,|l(1-\varepsilon)| \geqq 2y\left[4(1-\varepsilon)\sin^2\frac{y}{3}\,l(1-\varepsilon)+\varepsilon^2\right]. \tag{16}$$

D'ailleurs nous supposerons $|l(1-\varepsilon)| < 2\varepsilon < \delta^2$, ce qui suffira.

Du développement

$$\sin\frac{2}{3}yl(1-\varepsilon) = \frac{2}{3}yl(1-\varepsilon) - \frac{2^3}{3!\,3^3}y^3l^3(1-\varepsilon) + \frac{2^5}{5!\,3^5}y^5l^5(1-\varepsilon) - \frac{2^7}{7!\,3^7}y^7l^7(1-\varepsilon) + \dots$$

on conclut:

$$|\sin \frac{2}{3} y l (1-\varepsilon)| \geqq \frac{2}{3} y |l(1-\varepsilon)| - \frac{2^3}{3!\,3^3} y^3 |l^3(1-\varepsilon)|$$

car on a:

$$\frac{2^7}{7!\,3^7} y^7 |l^7(1-\varepsilon)| < \frac{2^5}{5!\,3^5} y^5 |l^5(1-\varepsilon)|$$

c'est-à-dire:

$$y^2 l^2 (1-\varepsilon) < 3^2 \cdot 6 \cdot 7$$

pour des valeurs de y dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta}$ et pour des valeurs de ε telles que $|l(1-\varepsilon)| < \delta^2$.

Il suit de là que la quantité au prémier membre de l'inégalité (16) est supérieure à

$$\frac{1}{3} |l(1-\varepsilon)| (4y^2+9) \cdot \left[\frac{2}{3} y |l(1-\varepsilon)| - \frac{2^3}{3!\,3^3} y^3 |l^3(1-\varepsilon)|\right].$$

D'ailleurs la quantité au second membre de l'inégalité (16) est inférieure à

$$2y\left[4(1-\varepsilon) \cdot \frac{y^2}{9} l^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^2\right]$$

et l'inégalité (16) est par conséquent satisfaite pour des valeurs de ε et de y qui satisfont à l'inégalité:

$$\frac{2}{9} y l^2(1-\varepsilon)(4y^2+9)\left[1 - \frac{2}{27} y^2 l^2 (1-\varepsilon)\right] > 2y\left[\frac{4}{9}(1-\varepsilon) y^2 l^2 (1-\varepsilon) + \varepsilon^2\right]. \quad (17)$$

On démontre aisément que les deux inégalités suivantes

$$\frac{2}{9} y l^2(1-\varepsilon) \cdot 4y^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{27} y^2 l^2(1-\varepsilon)\right] > 2y \cdot \frac{4}{9}(1-\varepsilon) y^2 l^2 (1-\varepsilon) \quad (18)$$

et

$$\frac{2}{9} y l^2(1 \quad \varepsilon) \cdot 9 \cdot \left[1 - \frac{2}{27} y^2 l^2 (1-\varepsilon)\right] > 2y\varepsilon^2 \quad (19)$$

sont justes pour des valeurs de y et de ε que nous considérons, car la première de ces inégalités se réduit à

$$1 - \frac{2}{27} y^2 l^2 (1-\varepsilon) > 1-\varepsilon$$

c'est-à-dire:

$$y^2 l^2 (1-\varepsilon) < \frac{27}{2} \varepsilon \quad (20)$$

et lorsque $y \leqq \frac{1}{\delta}$ et $|l(1-\varepsilon)| < 2\varepsilon < \delta^2$, on trouve

$$y^2 l^2 (1-\varepsilon) \leqq \frac{1}{\delta^2} \cdot 4\varepsilon^2 < 2\varepsilon$$

d'où il suit que l'inégalité (20) est vraie et par suite aussi l'inégalité (18).

Quant à l'inégalité (19), elle se réduit à

$$l^2(1-\varepsilon)\left[1 - \frac{2}{27} y^2 l^2 (1-\varepsilon)\right] > \varepsilon^2$$

que nous écrivons:

$$\frac{2}{27} y^2 l^4 (1-\varepsilon) < l^2(1-\varepsilon) - \varepsilon^2. \quad (21)$$

Or on a $|l(1-\varepsilon)| > \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}$, c'est-à-dire $l^2(1-\varepsilon) - \varepsilon^2 > \varepsilon^3 + \frac{\varepsilon^4}{4}$; et, d'après les hypothèses faites sur y et ε, on a encore

$$\frac{2}{27} y^2 l^4(1-\varepsilon) < \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot 16\varepsilon^4 < \varepsilon^3.$$

L'inégalité (21) est ainsi juste et par conséquent aussi l'inégalité (19).

Cela posé, on arrive à l'inégalité (17) par l'addition des deux inégalités (18) et (19) et la démonstration de l'existence de l'inégalité (15) est ainsi établie. Il sera utile pour les recherches qui viennent ci-après d'énoncer le résultat obtenu de la manière suivante: Pour des valeurs de y dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta}$ on a:

$$\left.\begin{aligned} &\left| \frac{|l(1-\varepsilon)|}{3} (4y^2+9) \sin \frac{2}{3} y\, |l(1-\varepsilon)| - 2y \left[4(1-\varepsilon) \sin^2 \frac{y}{3}\, l(1-\varepsilon) + \varepsilon^2 \right] \right| \\ &= \frac{|l(1-\varepsilon)|}{3} (4y^2+9) \sin \frac{2}{3} y\, |l(1-\varepsilon)| - 2y \left[4(1-\varepsilon) \sin^2 \frac{y}{3}\, l(1-\varepsilon) + \varepsilon^2 \right] \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

en supposant $|l(1-\varepsilon)| < 2\varepsilon < \delta^2$.

Ce résultat obtenu, nous sommes en état de démontrer que la fonction sous le signe $\int$ de l'intégrale (14)

$$\frac{lu \cdot \sin mylu}{1 - 2u^{\frac{3m}{2}} \cos mylu + u^{3m}}$$

convergera uniformément vers la quantité

$$\frac{4y}{m(4y^2+9)}$$

pour $u = 1$, supposé que $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta}$ et $|l(1-\varepsilon)| < \varepsilon + \varepsilon^2 < 2\varepsilon < \delta^2$, ayant posé $u^{\frac{3m}{2}} = 1-\varepsilon$.

En d'autres termes, il s'agit de démontrer qu'on a:

$$\left| \frac{|lu| \,.\, \sin my\,|lu|}{1 - 2u^{\frac{3m}{2}} \cos mylu + u^{3m}} - \frac{4y}{m(4y^2+9)} \right| < \delta, \quad (23\,\text{a})$$

δ étant une quantité réelle positive aussi petite qu'on le voudra.

Posons $u^{\frac{3m}{2}} = 1-\varepsilon$, et l'inégalité prend la forme

$$\left| \frac{\frac{2}{3m} |l(1-\varepsilon)| \sin \frac{2}{3} y\, |l(1-\varepsilon)|}{4(1-\varepsilon) \sin^2 \frac{y}{3} l(1-\varepsilon) + \varepsilon^2} - \frac{4y}{m(4y^2+9)} \right| < \delta.$$

En la mettant sous forme entière on aura:

$$\left| \frac{2}{3} |l(1-\varepsilon)| (4y^2+9) \sin \frac{2}{3} y\, |l(1-\varepsilon)| - 4y \left[4(1-\varepsilon) \sin^2 \frac{y}{3} l(1-\varepsilon) + \varepsilon^2 \right] \right|$$
$$< \delta m (4y^2+9) \left[4(1-\varepsilon) \sin^2 \frac{y}{3} l(1-\varepsilon) + \varepsilon^2 \right]$$

ou, en vertu de l'équation (22):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2}{3}\,|l(1-\varepsilon)|\,(4y^2+9)\sin\frac{2}{3}y\,|l(1-\varepsilon)| - 4y\left[4(1-\varepsilon)\sin^2\frac{y}{3}l(1-\varepsilon)+\varepsilon^2\right]\\&\qquad < \delta m(4y^2+9)\left[4(1-\varepsilon)\sin^2\frac{y}{3}l(1-\varepsilon)+\varepsilon^2\right].\end{aligned}\right\}\quad(23\,\mathrm{b})$$

Pour faire voir que cette inégalité est juste, nous allons démontrer les deux inégalités suivantes:

$$\frac{8}{3}y^2|l(1-\varepsilon)|\sin\frac{2}{3}y\,|l(1-\varepsilon)| < \sin^2\frac{y}{3}l(1-\varepsilon)\left[16y(1-\varepsilon)+4(1-\varepsilon)\,m\delta(4y^2+9)\right]\quad(24)$$

et

$$6\,|l(1-\varepsilon)|\sin\frac{2}{3}y\,|l(1-\varepsilon)| < 4y\varepsilon^2 + m\delta\varepsilon^2(4y^2+9).\quad(25)$$

Par l'addition de ces deux inégalités on obtient l'inégalité (23 b). On conclut du développement:

$$\sin\frac{y}{3}l(1-\varepsilon) = \frac{y}{3}l(1-\varepsilon) - \frac{y^3}{3!\,3^3}l^3(1-\varepsilon) + \frac{y^5}{5!\,3^5}l^5(1-\varepsilon) - \frac{y^7}{7!\,3^7}l^7(1-\varepsilon) + \dots$$

qu'on a:

$$\left|\sin\frac{y}{3}l(1-\varepsilon)\right| > \frac{y}{3}|l(1-\varepsilon)| - \frac{y^3}{3!\,3^3}|l^3(1-\varepsilon)|,\quad(26)$$

car

$$\frac{y^7}{7!\,3^7}|l^7(1-\varepsilon)| < \frac{y^5}{5!\,3^5}|l^5(1-\varepsilon)|$$

c'est-à-dire:

$$y^2 l^2(1-\varepsilon) < 3^2\cdot 6\cdot 7$$

dans les hypothèses faites sur ε et y.

De l'inégalité (26) il suit:

$$\sin^2\frac{y}{3}\,l(1-\varepsilon) > \frac{y^2}{9}l^2(1-\varepsilon)\cdot\left[1-\frac{y^2l^2(1-\varepsilon)}{27}+\frac{y^4l^4(1-\varepsilon)}{2^2\cdot 3^6}\right] > \frac{y^2}{9}l^2(1-\varepsilon)\cdot(1-\varepsilon),$$

car l'inégalité:

$$1-\frac{y^2l^2(1-\varepsilon)}{27}+\frac{y^4l^4(1-\varepsilon)}{2^2\cdot 3^6} > 1-\varepsilon$$

c'est-à-dire:

$$\frac{y^2l^2(1-\varepsilon)}{27} < \varepsilon + \frac{y^4l^4(1-\varepsilon)}{2^2\cdot 3^6}$$

est sûrement juste, parce qu'on a:

$$\frac{y^2l^2(1-\varepsilon)}{27} < \frac{4\varepsilon^2}{27\delta^2} < \frac{4}{27}\varepsilon\cdot\frac{1}{2} < \varepsilon.$$

Il en résulte que la quantité au second membre de l'inégalité (24) reste supérieure à

$$\frac{y^2}{9}\,l^2(1-\varepsilon)\cdot(1-\varepsilon)^2\,[16y+36m\delta].$$

Quant à la quantité au premier membre de l'inégalité en question, elle est inférieure à $\frac{16}{9}y^3l^2(1-\varepsilon)$, et nous allons montrer qu'on a l'inégalité:

$$\frac{16}{9}y^3l^2(1-\varepsilon) < \frac{y^2}{9}l^2(1-\varepsilon)\cdot(1-\varepsilon)^2[16y+36m\delta], \tag{27}$$

qui se réduit à

$$16y < (1-\varepsilon)^2[16y+36m\delta].$$

Nous mettons cette inégalité sous la forme:

$$32\varepsilon y < 36m\delta(1-\varepsilon)^2+16y\varepsilon^2.$$

On voit tout de suite qu'elle est vraie, car on a pour les valeurs considérées de y et de ε:

$$32\varepsilon y < 32\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{2}\delta^2 < 16\delta.$$

L'inégalité (27) entraîne que l'inégalité (24) est satisfaite.

Il nous reste alors à verifier l'inégalité (25). Nous remarquons qu'on a:

$$6\,|l(1-\varepsilon)|\,\left|\sin\frac{2}{3}yl(1-\varepsilon)\right| \leqq 4yl^2(1-\varepsilon) < 4y\varepsilon^3(1+\varepsilon)^2$$

en faisant usage de l'hypothèse $|l(1-\varepsilon)| < \varepsilon+\varepsilon^2$.

En remplaçant la quantité au premier membre de l'inégalité (25) par $4y\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2$ et la quantité au second membre par $4y\varepsilon^2+9m\delta\varepsilon^2$, nous avons à vérifier l'inégalité

$$4y\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2 < 4y\varepsilon^2+9m\delta\varepsilon^2$$

qui se réduit à

$$8y\varepsilon+4y\varepsilon^2 < 9m\delta.$$

D'après les hypothèses faites sur ε et y on a:

$$8y\varepsilon+4y\varepsilon^2 < 8\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{2}\delta^2+\frac{1}{\delta}\cdot\delta^4 < 4\delta+\delta^3$$

et cette quantité est sûrement inférieure à $9m\delta$ en supposant δ assez petit.

Les deux inégalités (24) et (25) sont ainsi vérifiées, et par l'addition on arrive à l'inégalité (23 b), d'où il résulte que l'inégalité (23 a) est satisfaite en supposant $y \leqq \frac{1}{\delta}$, $|l(1-\varepsilon)| < \varepsilon+\varepsilon^2 < 2\varepsilon < \delta^2$. Ce résultat obtenu, on démontre aisément que

$$\operatorname*{Lim}_{u=1}\int_0^\infty \frac{lu\sin mylu}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu+u^{3m}}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1} = \int_0^\infty \frac{4y}{m(4y^2+9)}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Pour le mettre en évidence, nous considérons l'intégrale

$$I = \int_0^\infty\left\{\frac{|lu|\cdot\sin my\,|lu|}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu+u^{3m}} - \frac{4y}{m(4y^2+9)}\right\}\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

que nous divisons en deux parties I_1 et I_2 de manière que

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{\delta}}\left\{\frac{|lu|\cdot\sin my\,|lu|}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu+u^{3m}} - \frac{4y}{m(4y^2+9)}\right\}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

et

$$I_2 = \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty\left\{\frac{|lu|\cdot\sin my\,|lu|}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu+u^{3m}} - \frac{4y}{m(4y^2+9)}\right\}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

En vertu de l'inégalité (23 a) on a:

$$|I_1| < \delta \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

et à fortiori
$$|I_1| < \delta.$$

D'ailleurs on trouve:

$$|I_2| \leqq \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \left| \frac{|lu| \sin my\,|lu|}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu + u^{3m}} - \frac{4y}{m(4y^2+9)} \right| \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$< \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{|lu \cdot \sin mylu|}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu + u^{3m}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{4y}{m(4y^2+9)} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Posons encore $u^{\frac{3m}{2}} = 1-\varepsilon$. De l'inégalité:

$$|I_2| < \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{\frac{2}{3m}|l(1-\varepsilon)|\,|\sin \frac{2}{3} y\, l(1-\varepsilon)|}{4(1-\varepsilon)\sin^2 \frac{y}{3} l(1-\varepsilon) + \varepsilon^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{4y}{m(4y^2+9)} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

on conclut:

$$|I_2| < \frac{4}{9m} \cdot \frac{l^2(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{ydy}{e^{2\pi y}+1} + \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{ydy}{e^{2\pi y}+1}$$

et en tenant compte de l'inégalité $|l(1-\varepsilon)| < 2\varepsilon$:

$$|I_2| < \left(\frac{16}{9m} + \frac{1}{m}\right) \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{ydy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Or on a:

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{ydy}{e^{2\pi y}+1} < \delta \quad \text{(voir page 8)}$$

d'où résulte:

$$|I_2| < c \cdot \delta$$

en désignant par c la constante $\frac{25}{9m}$.

D'après cela on a:

$$|I| < \delta + c \cdot \delta,$$

δ étant aussi petit qu'on le veut, ou en d'autres termes l'intégrale:

$$\int_0^{\infty} \frac{|lu| \sin my\,|lu|}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu + n^{3m}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

convergera vers l'intégrale $\frac{4}{m}\int_0^\infty \frac{y\,dy}{(4y^2+9)(e^{2\pi y}+1)}$ en faisant tendre u vers l'unité.

Revenons alors à l'expression asymptotique pour $L(au)$ que nous avons établie à la page 16. Cette expression était:

$$\left.\begin{aligned} L(au) = & -\frac{m-1}{2} + \frac{u^m}{1-u^m} + \frac{lm}{mlu} + \frac{l(1-u^{\frac{3m}{2}})}{mlu} \\ & + 2\int_0^\infty \frac{u^{\frac{3m}{2}} \sin mylu}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu + u^{3m}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

En multipliant les deux membres de cette équation par lu et en faisant tendre u vers l'unité on obtient en vertu du résultat que nous venons d'établir l'expression asymptotique suivante:

$$lu \cdot L(au) = -\frac{1}{m} + \frac{lm}{m} + \frac{1}{m} l(1-u^{\frac{3m}{2}}) + \frac{8}{m}\int_0^\infty \frac{y}{4y^2+9} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

De cette expression asymptotique pour $lu \cdot L(au)$ on en obtient une autre pour la fonction $\frac{lu \,.\, L(au)}{l(1-\sqrt{u})}$ en divisant par $l(1-\sqrt{u})$ et en faisant tendre u vers 1. On arrive à l'expression:

$$\lim_{u=1} \frac{lu \cdot L(au)}{l(1-\sqrt{u})} = \frac{1}{m}.$$

Ce résultat bien simple est digne d'intérêt, il me semble[1]). Il montre par rapport à la série de Lambert $L(s)$ que la fonction $\frac{lu \cdot L(au)}{l(1-\sqrt{u})}$ tend vers $\frac{1}{m}$ quand le variable complexe s suivant le rayon vecteur s'approche d'un point du cercle de convergence dont l'affixe est une racine primitive de l'équation $x^m = 1$. Pour $m = 1$, c'est-à-dire $a = 1$, l'expression est celle bien connue:

$$\lim \frac{ls \cdot L(s)}{l(1-\sqrt{s})} = 1.$$

§ 4. Dans ce paragraphe nous allons étudier la fonction

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^n}$$

sur le cercle de convergence.

[1]) Après avoir terminé ces recherches nous avons reçu de M. Knopp ses thèses de doctorat intitulées: Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Berlin 1907, dans lesquelles l'auteur a obtenu la même proposition (page 31 du mémoire cité) d'une toute autre manière mais sans avoir l'expression pour $L(au)$ et les expressions asymptotiques pour $L(au)$ et $lu \,.\, L(au)$ que nous avons établies.

Cette fonction est liée étroitement à la série de Lambert, comme le montre l'équation:

$$\varphi(s) = L(s) - 2L(s^2).$$

A l'aide de cette identité et en faisant usage de l'expression asymptotique pour la fonction $L(au)$ on obtient facilement une expression asymptotique pour $\varphi(au)$ où a et u ont les mêmes désignations que dans les paragraphes précédents.

Posons $s = au$, on a alors:

$$\varphi(au) = L(au) - 2L(a^2u^2). \tag{29}$$

Il s'agit maintenant d'établir une expression asymptotique pour $L(a^2u^2)$, où a désigne une racine primitive dans l'équation $x^m = 1$.

Il faut alors distinguer les deux cas: m pair et m impair. Considérons d'abord le cas où m est impair. Dans ce cas la quantité a^2 est aussi une racine primitive de l'équation $x^m = 1$, et on aura par conséquent une expression asymptotique pour la fonction $L(a^2u^2)$ en remplaçant a par a^2 et u par u^2 dans l'équation (28) sans changer le nombre m. On arrive alors à l'expression:

$$L(a^2u^2) = -\frac{m-1}{2} + \frac{u^{2m}}{1-u^{2m}} + \frac{lm}{2mlu} + \frac{l(1-u^{3m})}{2mlu}$$
$$+ 2\int_0^\infty \frac{u^{3m}\sin 2mylu}{1-2u^{3m}\cos 2mylu + u^{6m}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

En substituant ces expressions asymptotiques pour $L(au)$ et $L(a^2u^2)$ dans l'équation (29), on obtient pour $\varphi(au)$ l'expression:

$$\varphi(au) = \frac{m-1}{2} + \frac{u^m}{1+u^m} - \frac{l(1+u^{\frac{3m}{2}})}{mlu} + 2\int_0^\infty \frac{u^{\frac{3m}{2}}\sin mylu}{1+2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu + u^{3m}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}. \tag{30}$$

Or l'intégrale du second membre de cette équation converge vers zéro en faisant tendre u vers l'unité, comme nous l'avons démontré à la page 13, d'où il suit qu'on a l'expression asymptotique:

$$\varphi(au) = \frac{m}{2} - \frac{l(1+u^{\frac{3m}{2}})}{mlu} \tag{31}$$

pourvu que m soit un entier impair.

Posons spécialement $m = 1$; l'équation (31) montre qu'on a asymptotiquement:

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} - \frac{l(1+s\sqrt{s})}{ls}$$

valable sur l'axe des nombres réels positifs. Cette expression asymptotique n'est autre chose que la suivante:

$$\varphi(s) = -\frac{l(1+\sqrt{s})}{ls}$$

que nous avons établie à la page 16 dans la note citée page 3, car on voit aisément qu'on a:

$$\operatorname*{Lim}_{s=1}\left[\frac{1}{2}-\frac{l(1+s\sqrt{s})}{ls}+\frac{l(1+\sqrt{s})}{ls}\right]=0.$$

Considérons alors le cas où m désigne un entier pair. Pour obtenir une expression asymptotique pour la fonction $L(\alpha^2 u^2)$ il faut remplaçer α par α^2, u par u^2 et m par $\frac{m}{2}$ dans l'équation (28) parce que α^2 est une racine primitive dans l'équation $x^{\frac{m}{2}}=1$, étant donnée l'hypothèse faite sur m. On arrive alors à l'expression asymptotique

$$L(\alpha^2 u^2)=-\frac{m-2}{4}+\frac{u^m}{1-u^m}+\frac{l\frac{m}{2}}{mlu}+\frac{l(1-u^{\frac{3m}{2}})}{mlu}$$
$$+2\int_0^\infty\frac{u^{\frac{3m}{2}}\sin mylu}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu+u^{3m}}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

ce qui entraîne à cause de l'identité (29) pour $\varphi(\alpha u)$ l'expression asymptotique:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha u)=-\frac{1}{2}-\frac{u^m}{1-u^m}+\frac{lm-2l\frac{m}{2}}{mlu}-\frac{l(1-u^{\frac{3m}{2}})}{mlu}&\\ -2\int_0^\infty\frac{u^{\frac{3m}{2}}\sin mylu}{1-2u^{\frac{3m}{2}}\cos mylu+u^{3m}}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}&\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

pourvu que m soit un entier pair.

En comparant les deux expressions (31) et (32) on voit que la nature des points singuliers de la fonction $\varphi(s)$ sur le cercle de convergence est bien différente suivant que le degré de l'équation $x^m=1$ qui détermine l'affixe du point considéré est pair ou impair. On voit tout d'abord que le cercle de convergence est une coupure essentielle pour la fonction $\varphi(s)$.

Multiplions maintenant les deux membres de l'équation (32) par lu et faisons tendre u vers l'unité. On arrive alors à l'expression asymptotique suivante:

$$\varphi(\alpha u)\cdot lu=\frac{1}{m}+\frac{2l2-lm}{m}-\frac{1}{m}l(1-u^{\frac{3m}{2}})-\frac{8}{m}\int_0^\infty\frac{y}{4y^2+9}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}\qquad(33)$$

en tenant compte du résultat énoncé page 20.

De l'expression (33) on conclut enfin:

$$\operatorname{Lim}\frac{lu\,\varphi(\alpha u)}{l(1-u)}=-\frac{1}{m},$$

m désignant un nombre pair quelconque.

Les équations (31) et (32) nous montrent qu'il n'en existe pas deux entre des rayons vecteurs envisagés, le long desquelles on doive appliquer la même expression asymptotique.

§ 5. Dans ce paragraphe nous allons étudier la fonction $\Phi(s)$ de Weierstrass[1])

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}}$$

sur le cercle de convergence.

En désignant encore par α une racine primitive de l'équation $x^m = 1$, m étant un entier quelconque, et en posant $s = \alpha u$, u étant une quantité réelle dans l'intervalle $0 \leq u < 1$, on obtient pour $\Phi(\alpha u)$ l'expression:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\alpha u) = &\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha u^{mp+1}}{1+\alpha^2 u^{2mp+2}} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha^2 u^{mp+2}}{1+\alpha^4 u^{2mp+4}} + \cdots + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m-1} u^{mp+m-1}}{1+\alpha^{2m-2} u^{2mp+2m-2}} \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^{mp+m}}{1+u^{2mp+2m}}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Chaque terme du second membre a la forme

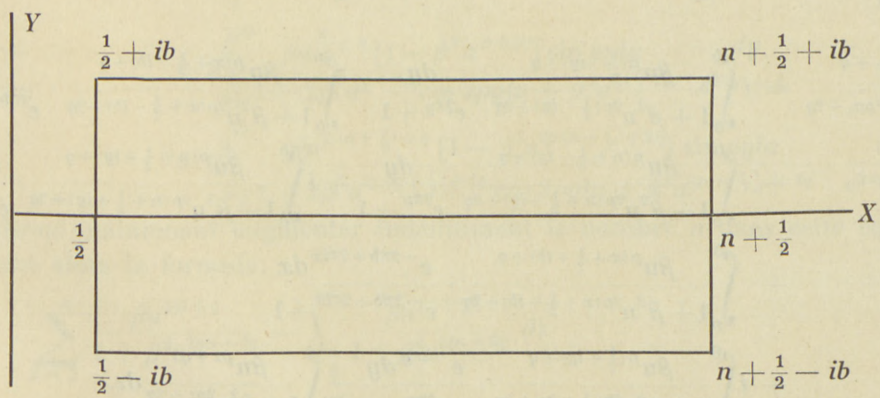
$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta u^{pn+q}}{1+\beta^2 u^{2pn+2q}}, \tag{35}$$

p et q désignant des nombres entiers positifs et β étant une quantité complexe dont le module est 1. Spécialement β a la valeur de $+1$ ou de -1.

Nous allons maintenant exprimer la série $f(u)$ par une intégrale définie en appliquant un procédé tout à fait analogue à celui dont nous avons fait usage dans la note citée page 3 pour trouver la somme de la série de Lambert. Nous considérons l'intégrale

$$\int \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} \cdot \frac{dz}{e^{2\pi i z}-1}$$

prise dans le sens positif le long du contour d'un rectangle dont les côtés, parallèles aux axes, passent par les points $\frac{1}{2}$, $n+\frac{1}{2}$, bi, $-bi$, n désignant un nombre entier positif quelconque et b une quantité réelle positive.



[1]) Weierstrass: Mathematische Werke, Band II, p. 227. Voir aussi la note de l'auteur, citée page 3, dans laquelle nous avons traité la fonction $\Phi(s)$ pour des valeurs réelles positives de s.

Nous convenons de prendre pour u^z la valeur de e^{zlu}, où lu est fixé de telle manière qu'il prenne des valeurs réelles pour des valeurs réelles positives de u.

La fonction sous le signe $\int$ admet comme pôles dans l'intérieur du rectangle les points $z = 1, 2, 3 \ldots n$ et en outre les points singuliers de la fonction $\frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}}$, qui sont de la forme

$$z = -\frac{q}{p} + i \cdot \frac{(2p_1+1)\pi - 2\varphi}{2plu}$$

en posant $\beta = e^{i\varphi}$, p_1 étant un nombre entier quelconque. Or p et q sont du même signe, et par conséquent tous ces pôles sont extérieurs au rectangle. D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale se réduit à la somme des intégrales prises sur des circonférences infiniment petites ayant leurs centres aux points 1, 2, ... n.

On voit tout de suite que le résidu de la fonction sous le signe $\int$ relatif au pôle $z = n_1$, n_1 désignant un nombre entier quelconque, a la valeur:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1+\beta^2 u^{2pn_1+2q}}.$$

Nous avons ainsi:

$$\sum_{n_1=1}^{n_1=n} \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1+\beta^2 u^{2pn_1+2q}} = \int \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} \cdot \frac{dz}{e^{2\pi i z}-1},$$

l'intégrale étant prise le long du contour du rectangle.

Cette intégrale se laisse exprimer d'une autre manière. En employant le procédé de M. Petersen[1]), nous divisons le chemin d'intégration en deux parties: celle située au-dessus de l'axe des x que nous désignons par C et celle située au-dessous. Sur le chemin C l'intégrale peut s'écrire:

$$\int_{(C)} \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} \cdot \frac{e^{2\pi i z}}{e^{2\pi i z}-1} dz - \int_{(C)} \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} dz$$

et on a:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{n_1=1}^{n_1=n} \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1+\beta^2 u^{2pn_1+2q}} &= i\int_0^b \frac{\beta u^{p(\frac{1}{2}-iy)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(\frac{1}{2}-iy)+2q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} + \int_0^n \frac{\beta u^{p(x+\frac{1}{2}-ib)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(x+\frac{1}{2}-ib)+2q}} \cdot \frac{-dx}{e^{2\pi b+2\pi i x}+1} \\
&+ i\int_b^0 \frac{\beta u^{p(n+\frac{1}{2}-iy)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(n+\frac{1}{2}-iy)+2q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} + i\int_0^b \frac{\beta u^{p(n+\frac{1}{2}+iy)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(n+\frac{1}{2}+iy)+2q}} \cdot \frac{e^{-2\pi y}dy}{e^{-2\pi y}+1} \\
&+ \int_n^0 \frac{\beta u^{p(x+\frac{1}{2}+ib)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(x+\frac{1}{2}+ib)+2q}} \cdot \frac{e^{-2\pi b+2\pi i x}dx}{e^{-2\pi b+2\pi i x}+1} \\
&+ i\int_b^0 \frac{\beta u^{p(\frac{1}{2}+iy)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(\frac{1}{2}+iy)+2q}} \cdot \frac{e^{-2\pi y}dy}{e^{-2\pi y}+1} - \int_{(C)} \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} dz.
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

[1]) J. Petersen: Vorlesungen über Funktionentheorie, Kopenhagen 1898, p. 161.

D'après l'hypothèse faite sur u la fonction $\frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}}$ n'admet pas de pôles dans l'intérieur du rectangle, et nous pouvons remplacer l'intégrale

$$-\int_{(C)} \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} dz \quad \text{par} \quad \int \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} dz\,,$$

cette dernière intégrale prise sur l'axe des x du point $\frac{1}{2}$ jusqu'à $n+\frac{1}{2}$.

Laissons maintenant la quantité b augmenter indéfiniment. Les intégrales:

$$\int_0^n \frac{\beta u^{p(x+\frac{1}{2}-ib)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(x+\frac{1}{2}-ib)+2q}} \cdot \frac{dx}{e^{2\pi b+2\pi i x}+1}$$

et

$$\int_n^0 \frac{\beta u^{p(x+\frac{1}{2}+ib)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(x+\frac{1}{2}+ib)+2q}} \cdot \frac{e^{-2\pi b+2\pi i x}\,dx}{e^{-2\pi b+2\pi i x}+1}$$

tendent alors vers zéro, et l'équation (36) peut s'écrire:

$$\sum_{n_1=1}^{n_1=n} \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1+\beta^2 u^{2pn_1+2q}} = i\int_0^\infty \left[\frac{\beta u^{p(\frac{1}{2}-iy)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(\frac{1}{2}-iy)+2q}} - \frac{\beta u^{p(\frac{1}{2}+iy)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(\frac{1}{2}+iy)+2q}}\right] \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$+\, i\int_0^\infty \left[\frac{\beta u^{p(n+\frac{1}{2}+iy)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(n+\frac{1}{2}+iy)+2q}} - \frac{\beta u^{p(n+\frac{1}{2}-iy)+q}}{1+\beta^2 u^{2p(n+\frac{1}{2}-iy)+2q}}\right] \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} dz.$$

En réduisant les expressions sous les signes $\int$ on obtient la formule

$$\sum_{n_1=1}^{n_1=n} \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1+\beta^2 u^{2pn_1+2q}} = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} dz$$

$$+\, 2\int_0^\infty \frac{\beta u^{\frac{p}{2}+q}\left[1-\beta^2 u^{p+2q}\right]\sin pylu}{1+2\beta^2 u^{p+2q}\cos 2pylu+\beta^4 u^{2p+4q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$-\, 2\int_0^\infty \frac{\beta u^{p(n+\frac{1}{2})+q}\left[1-\beta^2 u^{2p(n+\frac{1}{2})+2q}\right]\sin pylu}{1+2\beta^2 u^{2p(n+\frac{1}{2})+2q}\cos 2pylu+\beta^4 u^{4p(n+\frac{1}{2})+4q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Faisons maintenant augmenter indéfiniment le nombre n dans cette équation. On obtient alors la formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta u^{pn+q}}{1+\beta^2 u^{2pn+2q}} = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\beta u^{pz+q}}{1+\beta^2 u^{2pz+2q}} dz$$

$$+\, 2\int_0^\infty \frac{\beta u^{\frac{p}{2}+q}\left[1-\beta^2 u^{p+2q}\right]\sin pylu}{1+2\beta^2 u^{p+2q}\cos 2pylu+\beta^4 u^{2p+4q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \qquad (37)$$

car la seconde intégrale au second membre de l'équation tend vers zéro quand n croît à l'infini dans l'hypothèse $0 < u < 1$.

En substituant cette expression à la série

$$\sum \frac{\beta u^{pn+q}}{1+\beta^2 u^{2pn+2q}}$$

dans l'équation (34), elle prendra la forme:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(au) &= \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\alpha^p u^p}{1+\alpha^{2p}u^{2p}} + \sum_{p=1}^{p=m} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\alpha^p u^{mz+p}}{1+\alpha^{2p}u^{2mz+2p}}\,dz \\ &+ 2\sum_{p=1}^{p=m} \int_0^\infty \frac{\alpha^p[1-\alpha^{2p}u^{m+2p}]\,u^{\frac{m}{2}+p}\sin mylu}{1+2\alpha^{2p}u^{m+2p}\cos 2mylu+\alpha^{4p}u^{2m+4p}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Posons spécialement $\alpha = 1$, $m = 1$, on obtient alors pour la fonction $\Phi(s)$ une expression applicable à des valeurs réelles de s dans l'intervalle $0 \leqq s < 1$.

$$\Phi(s) = \frac{s}{1+s^2} - \frac{\operatorname{arctg} s\sqrt{s}}{ls} + 2\int_0^\infty \frac{(1-s^3)\,s\sqrt{s}\sin yls}{1+2s^3\cos 2yls+s^6} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

En posant $\beta = p = 1$, $q = 0$ dans l'équation (37) on obtient aussi pour $\Phi(s)$ une expression applicable dans l'intervalle $0 \leqq s < 1$; cette expression est la suivante

$$\Phi(s) = -\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s}}{ls} + 2\int_0^\infty \frac{(1-s)\sqrt{s}\sin yls}{1+2s\cos 2yls+s^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}, \quad (39)$$

que nous avons communiquée dans la note citée page 3.

Nous allons maintenant faire tendre u vers l'unité dans l'équation (38), et nous commençons par chercher la limite vers laquelle tend le module de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\alpha^p[1-\alpha^{2p}u^{m+2p}]\,u^{\frac{m}{2}+p}\sin mylu}{1+2\alpha^{2p}u^{m+2p}\cos 2mylu+\alpha^{4p}u^{2m+4p}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

quand u tend vers l'unité.

Supposons donnée une quantité réelle positive δ aussi petite qu'on voudra, et écrivons:

$$I = I_1 + I_2$$

où

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\alpha^p[1-\alpha^{2p}u^{m+2p}]\,u^{\frac{m}{2}+p}\sin mylu}{1+2\alpha^{2p}u^{m+2p}\cos 2mylu+\alpha^{4p}u^{2m+4p}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

et

$$I_2 = \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty \frac{\alpha^p[1-\alpha^{2p}u^{m+2p}]\,u^{\frac{m}{2}+p}\sin mylu}{1+2\alpha^{2p}u^{m+2p}\cos 2mylu+\alpha^{4p}u^{2m+4p}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Posons pour simplifier l'écriture $\alpha^{2p} = a + ib$; a et b sont des quantités réelles qui satisfont à l'équation $a^2 + b^2 = 1$, et en outre $u^{m+2p} = k$; on a alors (voir page 12):

$$\left|1+2a^{2p}u^{m+2p}\cos 2mylu+a^{4p}u^{2m+4p}\right| \geqq (1-k^2)\left|\sqrt{1-a^2}\right|$$

quelle que soit la valeur de $\cos 2mylu$.

Pour des valeurs de y dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\delta}$ et pour des valeurs de k assez proches de l'unité on a (voir p. 12—13):

$$\left|1+2a^{2p}u^{m+2p}\cos 2mylu+a^{4p}u^{2m+4p}\right| > |2bk| \cdot \tfrac{1}{2}(1+ak),$$

d'où il suit

$$|I_1| < |1-k(a+ib)| \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{my\,|lk|}{k(1+ak)\,|b|} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} < \frac{C\cdot|lk|}{|b|\,k(1+ak)}, \tag{40a}$$

C désignant une constante, et

$$|I_2| < \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{|1-k(a+ib)|\cdot my\,|lu|}{(1-k^2)\left|\sqrt{1-a^2}\right|} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} < \frac{|1-k(a+ib)|}{\left|\sqrt{1-a^2}\right|} \cdot m \cdot \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon-\varepsilon^2} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^{2\pi y}+1}$$

ayant posé $k=1-\varepsilon$; on a ainsi:

$$|I_2| < C_1 \cdot \frac{\delta}{\left|\sqrt{1-a^2}\right|}. \tag{40b}$$

C_1 est une constante.

Les inégalités (40 a) et (40 b) montrent que les modules des intégrales I_1 et I_2 et par conséquent le module de l'intégrale I tend vers zéro pour $k=1$ pourvu que a soit différent de $+1$ ou -1.

Dans le cas où $a=1$, l'intégrale à examiner se réduit à:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{(1-k)\sin \mu ylk}{1+2k\cos 2\mu ylk+k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Il s'agit de trouver la limite de I pour $k=1$; μ est une quantité réelle positive. Nous posons $k=1-\varepsilon$, ε positif, et nous mettons l'intégrale sous la forme

$$I = I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\varepsilon \sin \mu yl(1-\varepsilon)}{4(1-\varepsilon)\cos^2 \mu yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1},$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{\varepsilon \sin \mu yl(1-\varepsilon)}{4(1-\varepsilon)\cos^2 \mu yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1},$$

δ étant une quantité réelle positive aussi petite qu'on le veut. Pour des valeurs de y dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq \delta$ et pour des valeurs de ε assez petites on aura:

$$\frac{\varepsilon\,|\sin \mu yl(1-\varepsilon)|}{4(1-\varepsilon)\cos^2 \mu yl(1-\varepsilon)+\varepsilon^2} < \mu\delta.$$

Pour le faire voir, nous mettons cette inégalité sous la forme:

$$|\sin \mu yl(1-\varepsilon)|\,[\varepsilon+4\delta(1-\varepsilon)\,|\sin \mu yl(1-\varepsilon)|] < 4\delta\mu(1-\varepsilon)+\delta\varepsilon^2\mu. \tag{41}$$

En supposant $0 \leqq y \leqq \delta$ et $|l(1-\varepsilon)| < \delta^2$ on a:

$$|\sin \mu y l(1-\varepsilon)| < \mu \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \delta^2 < \mu\delta$$

et par conséquent:

$$|\sin \mu y l(1-\varepsilon)| \, [\varepsilon + 4\delta(1-\varepsilon) \, |\sin \mu y l(1-\varepsilon)|] < \mu\delta(\varepsilon + 4\delta).$$

On voit tout de suite qu'on a:

$$\mu\delta(\varepsilon + 4\delta) < 4\delta\mu(1-\varepsilon) + \mu\delta\varepsilon^3$$

et à fortiori l'inégalité (41) est satisfaite.

Il en suit:

$$|I_1| \leqq \int_0^{\frac{1}{\delta}} \mu\delta \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} < \mu\delta \int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

d'où

$$|I_1| < \frac{\mu l 2}{2\pi}\delta.$$

Quant à l'intégrale I_2 on a:

$$|I_2| \leqq \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{\varepsilon \cdot \mu y \, |l(1-\varepsilon)|}{\varepsilon^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

et, en supposant $|l(1-\varepsilon)| \leqq 2\varepsilon$,

$$|I_2| \leqq 2\mu \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^{2\pi y}+1} \leqq 2\mu\delta \quad \text{(voir page 8).}$$

On a ainsi

$$|I| < \left(\frac{\mu l 2}{2\pi} + 2\mu\right)\delta$$

c'est-à-dire que l'intégrale I converge vers zéro, quand k tend vers l'unité. En appliquant ce résultat à l'équation (39) on arrive à l'expression asymptotique:

$$\Phi(s) = -\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{s}}{ls}$$

valable sur le rayon vecteur du point $s = 0$ à $s = 1$.

Dans le cas où $a = -1$ l'intégrale I a la forme:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \mu y l k}{1 - 2k \cos 2\mu y l k + k^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \text{ [1]};$$

cette intégrale devient infinie pour $k = 1$ comme la fonction $\frac{1}{lk}$. On vérifie aisément qu'on a, quelle que soit la valeur de y:

$$\frac{|lk| \cdot |\sin \mu y l k|}{1 - 2k \cos 2\mu y l k + k^2} \leqq 1.$$

En effet posons $k = 1 - \varepsilon$, ε positif, il s'agit alors de démontrer l'inégalité

$$0 \leqq 4(1-\varepsilon)\sin^2 \mu y l(1-\varepsilon) - |l(1-\varepsilon)| \cdot |\sin \mu y l(1-\varepsilon)| + \varepsilon^2.$$

[1]) Le cas $a = -1$ exige que le nombre m soit congru à zéro par rapport au module 4, car c'est seulement pour de telles valeurs de m qu'il existe une puissance paire de a, ayant la valeur de -1.

La condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme du second membre de cette inégalité soit positif quelle que soit la valeur de $\sin yl(1-\varepsilon)$, est:

$$l^2(1-\varepsilon) < 16\varepsilon^2(1-\varepsilon);$$

et cette condition est sûrement juste en supposant $|l(1-\varepsilon)| < 2\varepsilon$. Il en résulte que:

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin\mu ylk}{1-2k\cos\mu ylk+k^2}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}\right| \leq \frac{1}{|lk|}\cdot\int_0^\infty \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \leq \frac{l2}{2\pi|lk|}.$$

Revenons alors à l'équation (38) page 28 et faisons tendre u vers l'unité. Il faut distinguer les quatre cas où m est congru à 1, 2, 3 où 4 par rapport au module 4.

Considérons d'abord le cas où m est congru à 1 (mod. 4) et cherchons la valeur de la série

$$\sum_{p=1}^{p=m} \frac{\alpha^p u^p}{1+\alpha^{2p}u^{2p}}$$

pour $u=1$.

De l'identité

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)\,\ldots\ldots\,(x-\alpha^m) = x^m-1$$

on tire en remplaçant x par ix:

$$(ix-\alpha)(ix-\alpha^2)\,\ldots\ldots\,(ix-\alpha^m) = (ix)^m-1 \tag{42 a}$$

et en remplaçant x par $-ix$:

$$(-ix-\alpha)(-ix-\alpha^2)\,\ldots\ldots\,(-ix-\alpha^m) = (-ix)^m-1. \tag{42 b}$$

D'après notre hypothèse $i^m = i$, et ces deux équations se laissent écrire:

$$(x+i\alpha)(x+i\alpha^2)\,\ldots\ldots\,(x+i\alpha^m) = x^m+i$$

et

$$(x-i\alpha)(x-i\alpha^2)\,\ldots\ldots\,(x-i\alpha^m) = x^m-i.$$

En prenant le logarithme et en différentiant par rapport à x on aura les deux équations

$$\frac{1}{x-i\alpha}+\frac{1}{x-i\alpha^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{x-i\alpha^m} = \frac{mx^{m-1}}{x^m-i}$$

et

$$\frac{1}{x+i\alpha}+\frac{1}{x+i\alpha^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{x+i\alpha^m} = \frac{mx^{m-1}}{x^m+i}$$

d'où il suit par soustraction:

$$\frac{2i\alpha}{x^2+\alpha^2}+\frac{2i\alpha^2}{x^2+\alpha^4}+\ldots\ldots+\frac{2i\alpha^m}{x^2+\alpha^{2m}} = \frac{2imx^{m-1}}{x^{2m}+1}.$$

En y posant $x=1$ on obtient:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^4}+\ldots\ldots+\frac{\alpha^m}{1+\alpha^{2m}} = \frac{m}{2} \tag{43}$$

dans l'hypothèse $i^m = 1$.

Dans le cas où m est congru à 2 (mod. 4) les équations (42) sont:

$$(ix-a)(ix-a^2)\,\ldots\,(ix-a^m) = -x^m-1$$

et

$$(-ix-a)(-ix-a^2)\,\ldots\,(-ix-a^m) = -x^m-1\,,$$

d'où:

$$\left.\begin{aligned}(x-ia)(x-ia^2)\,\ldots\,(x-ia^m) &= x^m+1\\ (x+ia)(x+ia^2)\,\ldots\,(x+ia^m) &= x^m+1\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

et par conséquent:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{a^2}{1+a^4}+\,\ldots\,+\frac{a^m}{1+a^{2m}} = 0.$$

en appliquant le même procédé qui a conduit à l'équation (43).

Dans le cas où $i^m = -i$, on aura les équations:

$$\left.\begin{aligned}(x+ia)(x+ia^2)\,\ldots\,(x+ia^m) &= x^m-i\\ \text{et}\qquad (x-ia)(x-ia^2)\,\ldots\,(x-ia^m) &= x^m+i\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

d'où il suit:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{a^2}{1+a^4}+\,\ldots\,+\frac{a^m}{1+a^{2m}} = -\frac{m}{2}.$$

Il nous reste alors le cas où $i^m = 1$. Dans ce cas les termes dans la série

$$\sum_{p=1}^{p=m}\frac{a^p u^p}{1+a^{2p}u^{2p}}$$

qui correspondent à $p=\frac{m}{4}$ et $p=\frac{3m}{4}$ deviennent infinis pour $u=1$. Ces deux termes sont:

$$\frac{a^{\frac{m}{4}}u^{\frac{m}{4}}}{1-u^{\frac{m}{2}}} \quad \text{et} \quad -\frac{a^{\frac{m}{4}}u^{\frac{3m}{4}}}{1-u^{\frac{3m}{2}}}.$$

Leur somme est:

$$a^{\frac{m}{4}}\cdot u^{\frac{m}{4}}\cdot\frac{1+u^m}{1-u^{\frac{3m}{2}}}$$

et cette quantité croît à l'infini pour $u=1$. La somme des autres termes dans la série s'annulent pour $u=1$, parce que la série consiste en termes qui ont deux et deux la somme de zéro.

Considérons alors la série:

$$\sum_{p=1}^{p=m}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{a^p\,u^{mz+p}}{1+a^{2p}\,u^{2mz+2p}}\,dz$$

qui figure au second membre de l'équation (38).

On a:

$$\frac{a^p u^{mz+p}}{1+a^{2p}u^{2mz+2p}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^p u^{mz+p}}{1+ia^p u^{mz+p}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^p u^{mz+p}}{1-ia^p u^{mz+p}}$$

et par conséquent:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{a^p u^{mz+p}}{1+a^{2p}u^{2mz+2p}} dz = \left[-\frac{i}{2mlu} l(1+ia^p u^{mz+p}) + \frac{i}{2mlu} l(1-ia^p u^{mz+p})\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty}$$

$$= \frac{i}{2mlu} l \frac{1+ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}{1-ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}$$

d'où il suit:

$$\sum_{p=1}^{p=m} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{a^p u^{mz+p}}{1+a^{2p}u^{2mz+2p}} dz = \frac{i}{2mlu} l \prod_{p=1}^{p=m} \frac{1+ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}{1-ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}. \tag{46 a}$$

Posons

$$\frac{1+ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}{1-ia^p u^{\frac{m}{2}+p}} = \frac{1+ia^p}{1-ia^p} \cdot \varepsilon_1(u)$$

où $\varepsilon_1(u)$ désigne une quantité qui prend la valeur de l'unité pour $u=1$; on a alors:

$$\sum_{p=1}^{p=m} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{a^p u^{mz+p}}{1+a^{2p}u^{2mz+2p}} dz = \frac{i}{2mlu} \left\{ l \prod_{p=1}^{p=m} \frac{1+ia^p}{1-ia^p} + l\varepsilon_2(u) \right\}, \tag{46 b}$$

$\varepsilon_2(u)$ désignant une quantité qui a la valeur de 1 pour $u=1$.

Distinguons alors les quatre cas

$$i^m = \begin{cases} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{cases}.$$

Dans le cas $i^m = i$ on a (voir page 31):

$$\prod_{p=1}^{p=m} \frac{1+ia^p}{1-ia^p} = \frac{1+i}{1-i} = i$$

d'où il suit:

$$\sum_{p=1}^{p=m} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{a^p u^{mz+p}}{1+a^{2p}u^{2mz+2p}} dz = \frac{i}{2mlu} \left[\frac{\pi}{2} i + l\varepsilon_2(u)\right] = \frac{-\pi+\varepsilon(u)}{4mlu}$$

en désignant par $\varepsilon(u)$ une quantité qui s'annule pour $u=1$.

Considérons alors le cas où $i^m = -1$. Le produit

$$\prod_{p=1}^{p=m} \frac{1+ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}{1-ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}$$

nous donne pour $u=1$ la valeur de 1 d'après les équations (44) et par conséquent la quantité

$$\frac{1}{lu} l \prod_{p=1}^{p=m} \frac{1+ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}{1-ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}$$

prendra la forme $\frac{0}{0}$ pour $u = 1$. Pour trouver la vraie valeur nous écrivons:

$$\frac{1}{lu}\, l \prod_{p=1}^{p=m} \frac{1+i\alpha^p u^{\frac{m}{2}+p}}{1-i\alpha^p u^{\frac{m}{2}+p}} = \frac{\sum\limits_{p=1}^{p=m} l(1+i\alpha^p u^{\frac{m}{2}+p}) - \sum\limits_{p=1}^{p=m} l(1-i\alpha^p u^{\frac{m}{2}+p})}{lu}.$$

En désignant la vraie valeur de la quantité au premier membre de cette équation par P, on aura:

$$P = \left[\sum_{p=1}^{p=m} \frac{i\alpha^p\left(\frac{m}{2}+p\right) u^{\frac{m}{2}+p-1}}{1+i\alpha^p u^{\frac{m}{2}+p}} + \sum_{p=1}^{p=m} \frac{i\alpha^p\left(\frac{m}{2}+p\right) u^{\frac{m}{2}+p-1}}{1-i\alpha^p u^{\frac{m}{2}+p}}\right]_{u=1}$$

ou bien:

$$P = 2i \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\left(\frac{m}{2}+p\right)\alpha^p}{1+\alpha^{2p}}.$$

Pour évaluer cette somme nous remarquons que l'on a:

$$-iP = \frac{(m+2)\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{(m+4)\alpha^2}{1+\alpha^4} + \dots + \frac{2m\alpha^{\frac{m}{2}}}{1+\alpha^m}$$

$$-\frac{(2m+2)\alpha}{1+\alpha^2} - \frac{(2m+4)\alpha^2}{1+\alpha^4} - \dots - \frac{3m\alpha^{\frac{m}{2}}}{1+\alpha^m}$$

en tenant compte des équations $\alpha^{\frac{m}{2}} = -1$, $\alpha^{\frac{m}{2}+1} = -\alpha$, $\alpha^{\frac{m}{2}+2} = -\alpha^2 \dots$

Il en résulte:

$$iP = m \cdot \left[\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha^6} + \dots + \frac{\alpha^{\frac{m}{2}-1}}{1+\alpha^{m-2}} - \frac{1}{2}\right].$$

La série

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \dots + \frac{\alpha^{\frac{m}{2}-1}}{1+\alpha^{m-2}}$$

consiste en un nombre pair de termes qui ont deux et deux la somme de zéro, ce que nous donne l'équation:

$$\frac{\alpha^{\frac{m}{2}-q}}{1+\alpha^{m-2q}} = \frac{-\alpha^{-q}}{1+\alpha^{-2q}} = -\frac{\alpha^q}{1+\alpha^{2q}}.$$

On aura alors:

$$P = \frac{i}{2} m$$

d'où il résulte que la valeur de la série

$$\sum_{p=1}^{p=m} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\alpha^p u^{mz+p}}{1+\alpha^{2p} u^{2mz+2p}}\, dz$$

pour $u = 1$ est $-\frac{1}{4}$. La valeur est indépendante de m.

Dans le cas où $i^m = -i$ l'équation (46 a) se réduit à

$$\sum_{p=1}^{p=m} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{a^p u^{mz+p}}{1+a^{2p} u^{2mz+2p}} dz = \frac{i}{2mlu} \left\{ l \frac{1-i}{1+i} + l\varepsilon_1(u) \right\}$$

d'après l'équation (45), ou bien

$$\sum_{p=1}^{p=m} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{a^p u^{mz+p}}{1+a^{2p} u^{2mz+2p}} dz = \frac{\pi + \varepsilon(u)}{4mlu}$$

en désignant par $\varepsilon(u)$ une quantité, qui s'annule pour $u = 1$.

Il nous reste alors le cas où $i^m = 1$. La quantité au second membre de l'équation (46 a) prend pour $u = 1$ la forme $\frac{0}{0}$. En désignant par P la vraie valeur du produit

$$\frac{1}{lu} l \prod \frac{1+ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}{1-ia^p u^{\frac{m}{2}+p}}$$

pour $u = 1$, on a (voir page 34):

$$P = 2i \left[\sum_{p=1}^{p=m} \frac{a^p \left(\frac{m}{2}+p\right) u^{\frac{m}{2}+p-1}}{1+a^{2p} u^{m+2p}} \right]_{u=1}.$$

Les termes de cette série, qui correspondent aux valeurs $p = \frac{m}{4}$ et $p = \frac{3m}{4}$ deviennent infinis pour $u = 1$. Supprimons un moment ces deux termes et évaluons la somme Q des termes qui restent. Nous aurons:

$$-iQ = \frac{(m+2)a}{1+a^2} + \frac{(m+4)a^2}{1+a^4} + \ldots + \frac{\left(\frac{3m}{2}-2\right) a^{\frac{m}{4}-1}}{1+a^{\frac{m}{2}-2}} + \frac{\left(\frac{3m}{2}+2\right) a^{\frac{m}{4}+1}}{1+a^{\frac{m}{2}+2}} + \ldots$$

$$+ \frac{2ma^{\frac{m}{2}}}{1+a^m} + \frac{(2m+2)a^{\frac{m}{2}+1}}{1+a^{m+2}} + \ldots + \frac{\left(\frac{5m}{2}-2\right) a^{\frac{3m}{4}-1}}{1+a^{\frac{3m}{2}-2}} + \frac{\left(\frac{5m}{2}+2\right) a^{\frac{3m}{4}+1}}{1+a^{\frac{3m}{2}+2}} + \ldots$$

$$+ \frac{(3m-2)a^{m-1}}{1+a^{2m-2}} + \frac{3ma^m}{1+a^{2m}}.$$

Or $a^{\frac{m}{2}} = -1$, d'où il suit:

$$-iQ = \frac{(m+2)a}{1+a^2} + \ldots + \frac{\left(\frac{3m}{2}-2\right) a^{\frac{m}{4}-1}}{1+a^{\frac{m}{2}-2}} + \frac{\left(\frac{3m}{2}+2\right) a^{\frac{m}{4}+1}}{1+a^{\frac{m}{2}+2}} + \ldots + \frac{(2m-2)a^{\frac{m}{2}-1}}{1+a^{m-2}}$$

$$- \frac{(2m+2)a}{1+a^2} - \ldots - \frac{\left(\frac{5m}{2}-2\right) a^{\frac{m}{4}-1}}{1+a^{\frac{m}{2}-2}} - \frac{\left(\frac{5m}{2}+2\right) a^{\frac{m}{4}+1}}{1+a^{\frac{m}{2}+2}} - \ldots - \frac{(3m-2)a^{\frac{m}{2}-1}}{1+a^{m-2}} + \frac{m}{2}$$

ou bien:

$$iQ = m \cdot \left[\frac{a}{1+a^2} + \frac{a^2}{1+a^4} + \ldots + \frac{a^{\frac{m}{4}-1}}{1+a^{\frac{m}{2}-2}} + \frac{a^{\frac{m}{4}+1}}{1+a^{\frac{m}{2}+2}} + \ldots + \frac{a^{\frac{m}{2}-1}}{1+a^{m-2}} \right] - \frac{m}{2}.$$

La somme de la série entre parenthèses est zéro parce qu'elle consiste en termes qui ont deux et deux la somme de zéro (voir page 34).

On trouve ainsi:

$$P = \frac{m}{2} i + 2i \left[\frac{\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{4}\right) u^{\frac{m}{2} + \frac{m}{4} - 1} a^{\frac{m}{4}}}{1 - u^{m + \frac{m}{2}}} + \frac{\left(\frac{m}{2} + \frac{3m}{4}\right) a^{\frac{3m}{4}} u^{\frac{m}{2} + \frac{3m}{4} - 1}}{1 - u^{m + \frac{3m}{2}}} \right]_{u=1}$$

et

$$P = \frac{mi}{2} + \frac{mi}{2} \cdot u^{\frac{3m}{4} - 1} \cdot a^{\frac{m}{4}} \cdot \left[\frac{3}{1 - u^{\frac{3m}{2}}} - \frac{5u^{\frac{m}{2}}}{1 - u^{\frac{5m}{2}}} \right]_{u=1}.$$

Un calcul élémentaire montre que la vraie valeur de la quantité entre parenthèses est zéro pour $u = 1$, et on a alors:

$$P = \frac{mi}{2},$$

d'où il suit que la valeur de la série

$$\sum_{p=1}^{p=m} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{a^p u^{mz+p}}{1 + a^{2p} u^{2mz+2p}} dz$$

pour $u = 1$ est $-\frac{1}{4}$.

Ces résultats obtenus, nous sommes en état d'indiquer comment varie le module de $\Phi(au)$ quand u tend vers l'unité.

Considérons l'équation (38) page 28. Le résultat des recherches précédentes se laisse exprimer de la manière suivante:

Dans le cas où le nombre entier m est congru à 1 (mod. 4) on a l'expression asymptotique:

$$\Phi(au) = \frac{m}{2} - \frac{\pi}{4mlu}.$$

Dans le cas où m est congru à 2 (mod. 4) on a l'expression asymptotique

$$\Phi(au) = -\frac{1}{4}.$$

Lorsque m est congru à 3 (mod. 4) on a asymptotiquement:

$$\Phi(au) = -\frac{m}{2} + \frac{\pi}{4mlu},$$

et enfin quand m est congru à 4 (mod. 4) on a asymptotiquement:

$$\Phi(au) = a^{\frac{m}{4}} u^{\frac{m}{4}} \cdot \frac{1 + u^m}{1 - u^{\frac{3m}{2}}} - \frac{1}{4} + 2a^{\frac{m}{4}} (1 + u^{\frac{3m}{2}}) u^{\frac{3m}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\sin mylu}{1 - u^{\frac{3m}{2}} \cos 2mylu + u^{3m}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y} + 1}.$$

Ces expressions montrent le caractère des points singuliers de la fonction $\Phi(s)$ sur le cercle de convergence.

On voit tout d'abord que le cercle de convergence est une coupure essentielle pour la fonction $\Phi(s)$, résultat qui a été établi par Weierstrass d'une toute autre manière. Mais les expressions asymptotiques obtenues nous en apprennent beaucoup plus. Elles nous montrent que les points singuliers sont d'un caractère très différent selon que le degré de l'équation qui détermine l'affixe du point singulier est congru à 1, 2, 3 ou 4 par rapport au module 4. Surtout le cas où le degré est congru à 2 me paraît remarquable. Dans tous ces points la fonction $\Phi(s)$ prend une valeur bien déterminée et constante.

Copenhague, le 23 septembre 1907.